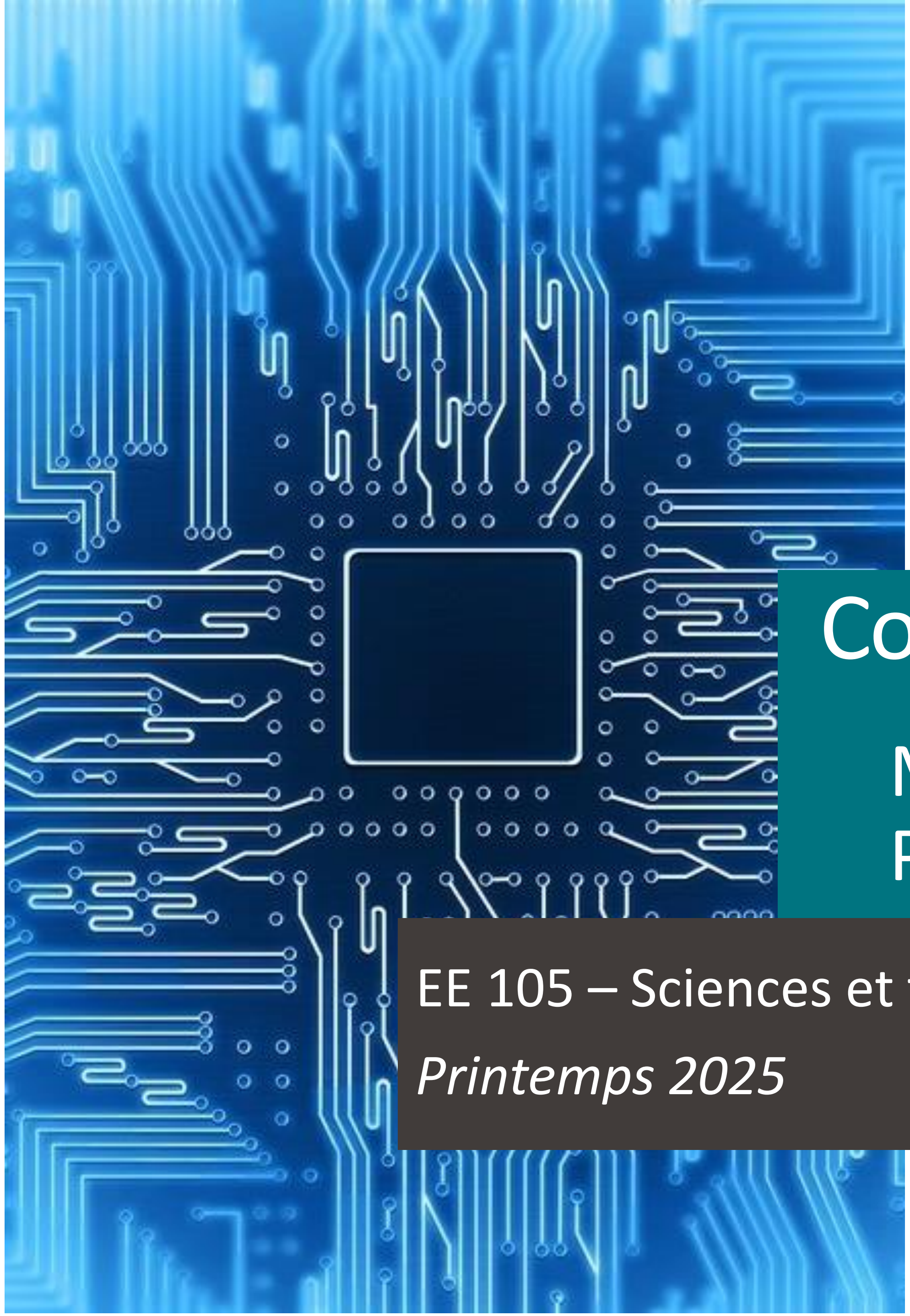
EPFL



Cours 4

Méthodes de resolutions
Principe de superposition

EE 105 – Sciences et technologies de l’électricité

Printemps 2025

Ecole Polytechnique Fédérale de Lausanne

Prof. Camille Brès - camille.bres@epfl.ch

Objectifs pour aujourd'hui

Méthode de résolution de circuits par simplifications successives

- Résoudre pour les grandeurs fondamentales, puis associées

Mise en équations

- N mailles indépendantes, N équations indépendantes
- Résoudre pour les courants des mailles indépendantes
- Représentation matricielle

Principe de superposition

Rappel

Les résistances en série ou parallèle peuvent être remplacées par une résistance équivalente .

Les résistances en série s’additionnent.

- La résistance équivalente est toujours plus grande que la plus grande des résistances

$$R_S = \sum_{k=1}^{N} R_k$$

Les conductances en parallèle s’additionnent.

- La résistance équivalente est toujours plus petite que la plus petite des résistances

$$\frac{1}{R_P} = \sum_{k=1}^{N} \frac{1}{R_k}$$

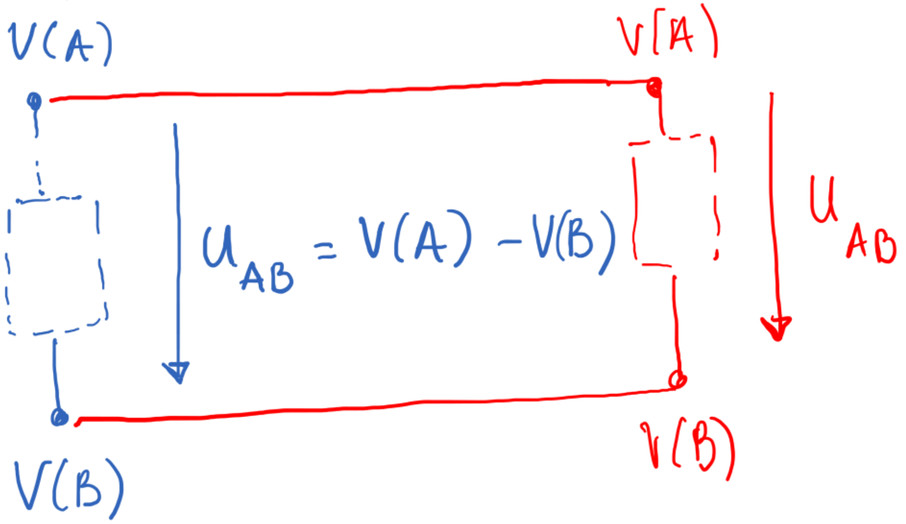
Nous pouvons transformer un arrangement triangle à résistance en un arrangement étoile à résistance

Autres rappels

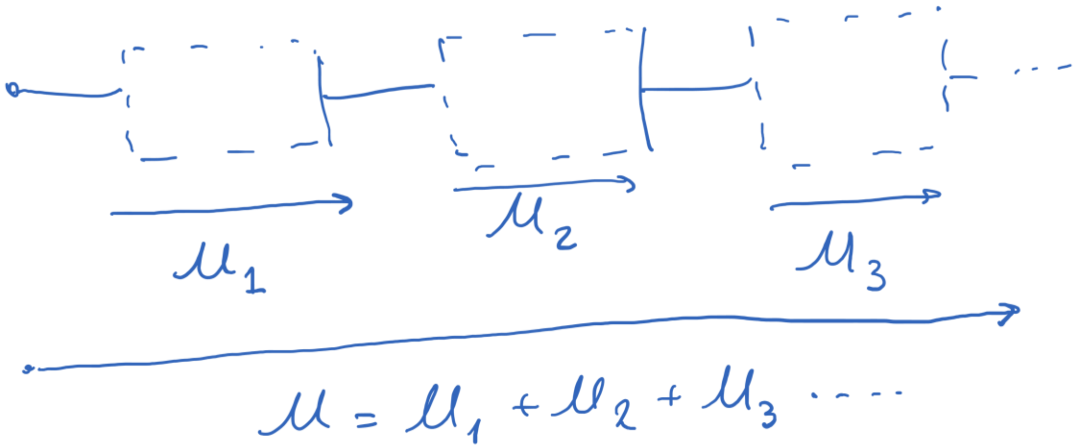
La tension

$V \rightsquigarrow \vec{E} \rightsquigarrow \vec{F}$

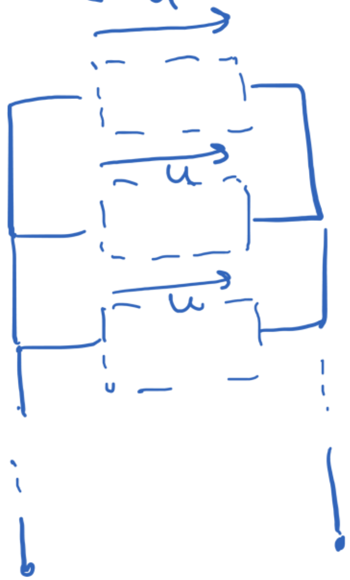
Dans un circuit U : différence de potentiel



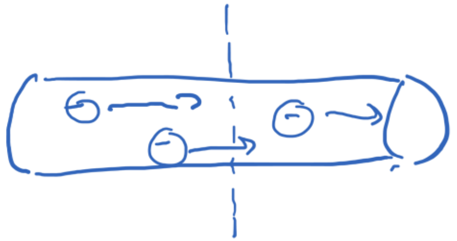
Série



Parallèle u



Le courant



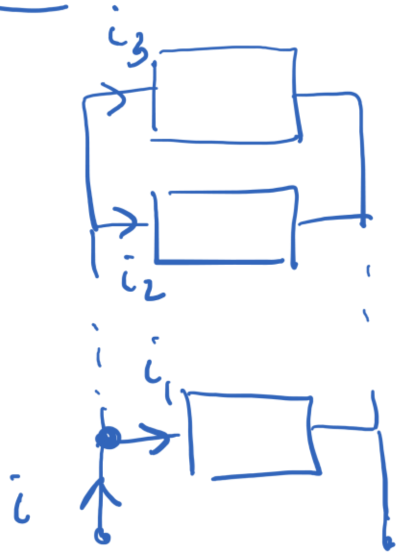
$$I = \frac{dq}{dt}$$

v_d : vitesse de dérive

$\propto I, S, n$

Série

Parallèle

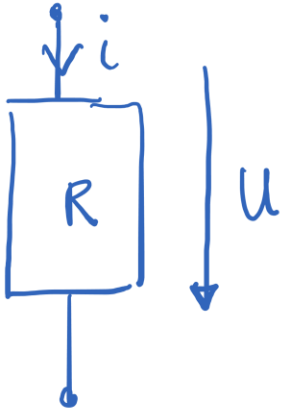


$$i = \sum_{k=1}^{N} i_k$$

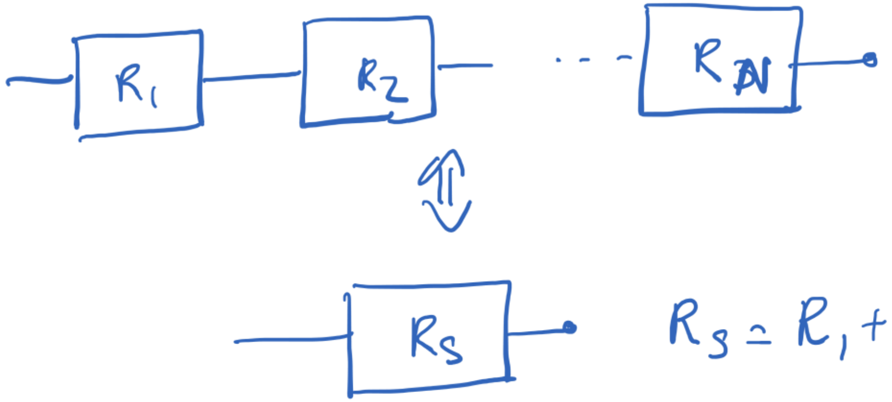
La résistance

$v_d \not\to \infty$

$u = Ri \quad , R \geq 0$

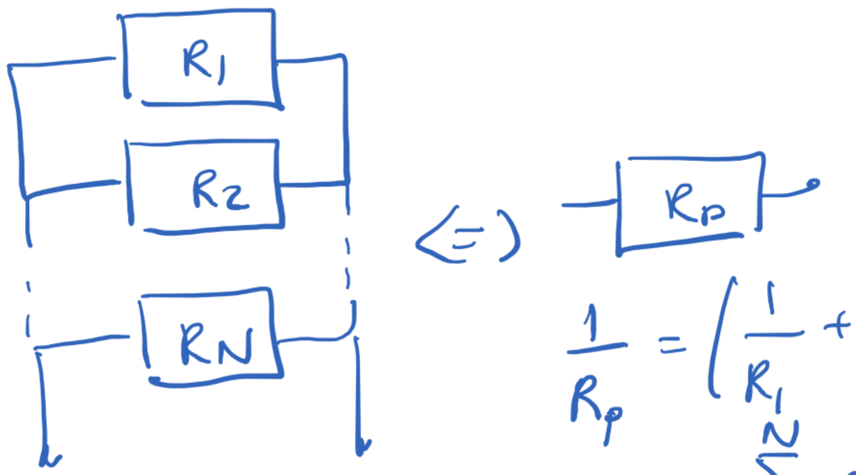


Série



$R_S = R_1 + R_2 + \dots R_N$

Parallèle

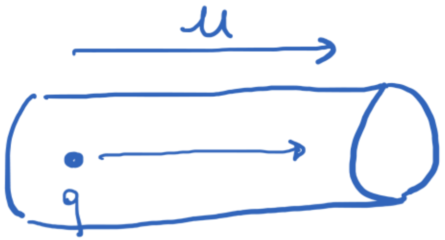


$\frac{1}{R_p} = \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \dots\right)$

$G_p = \sum_{k=1}^{N} G_k$

$R_1 // R_2 \Rightarrow \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2}$

La puissance



$$W = qU$$

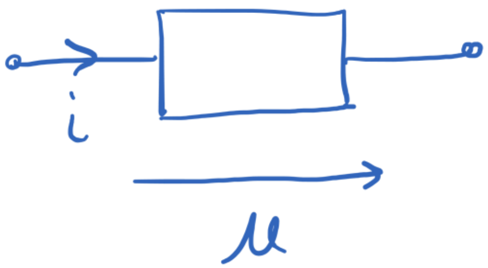
$$W_{tot} = dq\, U$$

$$P = \frac{dW_{tot}}{dt} = \frac{dq}{dt} U$$

$$P = ui$$

$$P(t) = u(t)\, i(t)$$

Travail Δt : $W = \int_{t_0}^{t_0+\Delta t} P(t)\,dt$



$P = ui$

$P > 0$: consommée $\quad P_R = Ui = Ri^2$

$P < 0$: fourni

Simplification de schéma

Simplification du schéma

Etape 1: dessiner un schéma électrique **clair, précis et lisible**

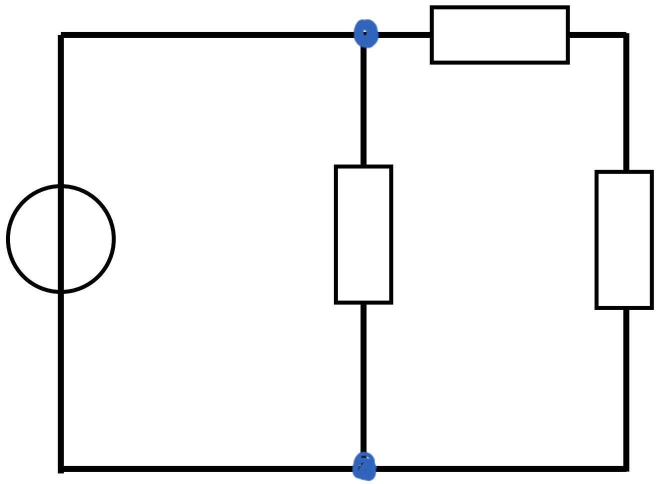
Etape 2: Identifier les **inconnues** à déterminer et les données

Etape 3: Ajouter les grandeurs électriques et les **flécher**

Etape 4: Procéder à des **simplifications** successives, autant que possible

Etape 5: **Mise en équation** en utilisant les lois de Kirchhoff et la loi d'Ohm

Petit retour sur la terminologie



Noeud: point de convergence de 3 conducteurs ou plus, contenant au moins un dipôle.

Branche: regroupe les éléments situés entre deux nœuds, traversés par le même courant

Maille: formée d'un ensemble de branches parcourues en partant d'un nœud pour y revenir sans passer deux fois par la même branche

Maille indépendante: une maille qui n'est pas constituée d'autres mailles

Petit retour sur les lois de Kirchhoff

Loi des noeuds

- La somme algébrique des courants sur un nœud est nulle

Loi des mailles

- La somme algébrique des tensions sur une maille est nulle

Nous avons vu qu'en régime continu, les lois de Kirchhoff permettent de générer *un nombre d'équations égal au nombre d'inconnus* (typiquement les courants de branche)

Nombre de courant de branche

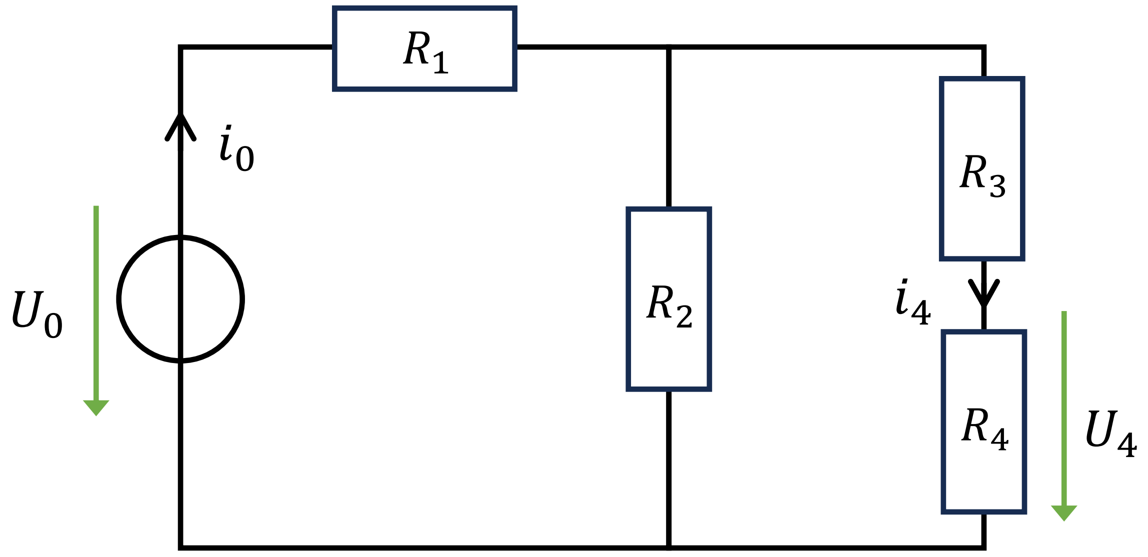
$$b = m_i + (n - 1)$$

Nombre d'équations obtenu par la loi des mailles

Nombre d'équations obtenu par la loi des noeuds

Exemple

Calculer la puissance fournie par la source de tension et la puissance consommée par R_4 en fonction de U_0



$R_1 = 5\ \Omega$

$R_2 = 100\ \Omega$

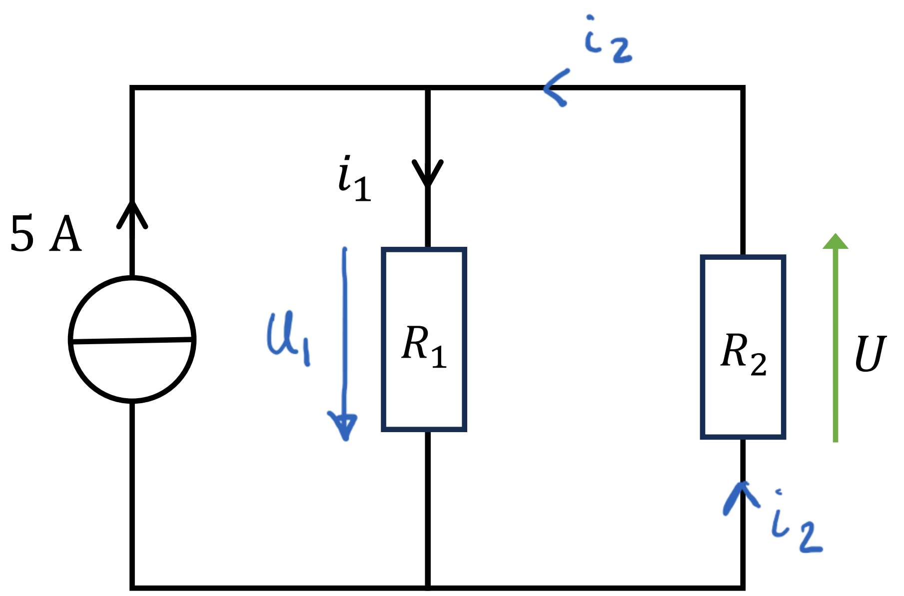
$R_3 = 100\ \Omega$

$R_4 = 50\ \Omega$

$U_0 = 25\text{V}$

Exemple 2

Trouver R_2 et U si $i_1 = 1$ A et $R_1 = 4\ \Omega$



$u_1 = i_1 R_1 = 4V$

$\Rightarrow u = -4V$

<u>noeud</u>

$5 + i_2 = i_1$

$i_2 = i_1 - 5 = -4A$

<u>Ohm</u> : $u = R_2 i_2$

$R_2 = \frac{u}{i_2} = \frac{-4}{-4} = 1\ \Omega$

Circuit 'simple'

Dépendent du nombre de mailles/nœuds les lois de Kirchhoff peuvent être appliquées directement

Le calcul d'un circuit plus complexe peut se faire par simplifications successives

- On obtient les grandeurs fondamentales
- Puis les grandeurs associées aux éléments simplifiés

Il faut souvent faire preuve d'astuce !

Si le circuit contient plus d'une source de tension, cette méthode simple ne s'applique généralement pas

Une mise en équation est une technique plus générale

Mise en équation

Mise en équation d'un circuit – analyse des mailles

Pour l'analyse de circuits avec multiples mailles/nœuds, multiples sources de tensions

Analyse des mailles:

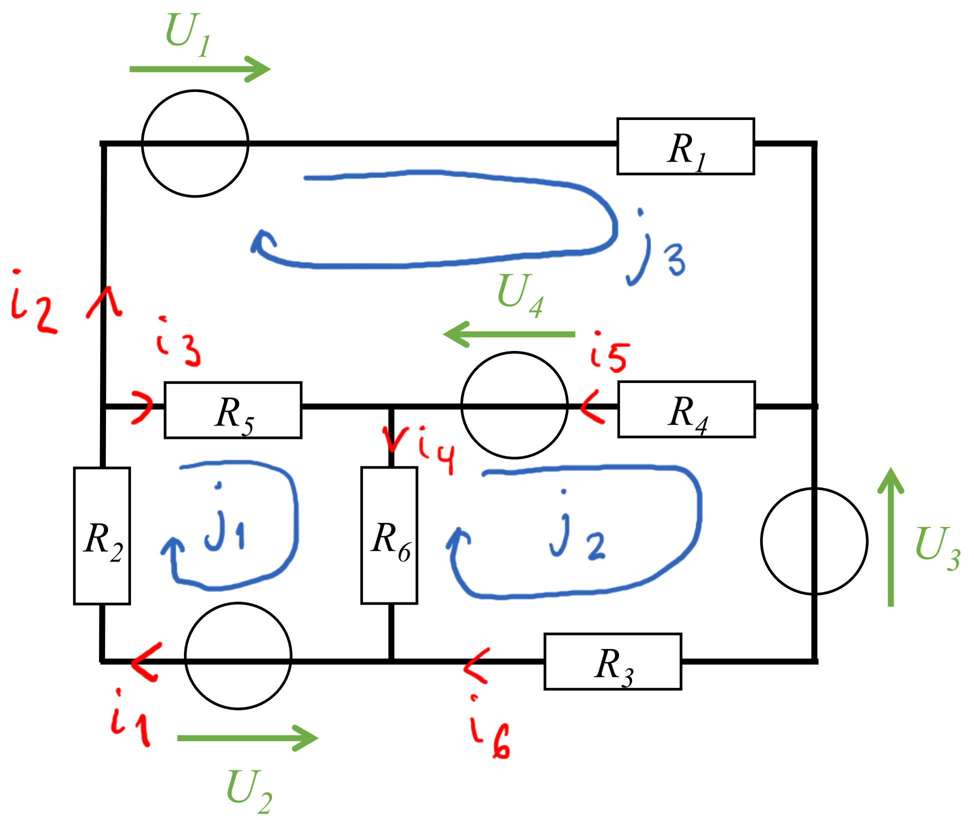
- Se base sur la loi de Kirchhoff pour les mailles et la loi d'Ohm
- Les *courants de maille* du circuit sont les variables à résoudre
- En général, pour un circuit avec N mailles indépendantes il faut N équations indépendantes simultanées pour résoudre le circuit

Les équations nécessaires sont obtenues en appliquant la loi de Kirchhoff pour les mailles au N mailles indépendantes du circuit

Concept: les courants de maille

Les courants de maille sont des courants ‘fictifs’ associé à des mailles indépendantes

Le courant des branches (courant réel) est alors égal à la *somme algébrique* des courants des mailles contiguës à cette branche.



$i_1 = j_1$

$i_2 = j_3$

$i_3 = j_1 - j_3$

$i_4 = j_1 - j_2$

$i_5 = j_3 - j_2$

$i_6 = j_2$

Mise en équation – analyse des mailles

Etape 1: Identifier les mailles indépendantes.

Etape 2: Associer à chaque maille indépendante un courant de maille.

- *Tous doivent être choisis dans le même sens.*
- Les courants de branche peuvent être exprimés en fonction des courants de maille

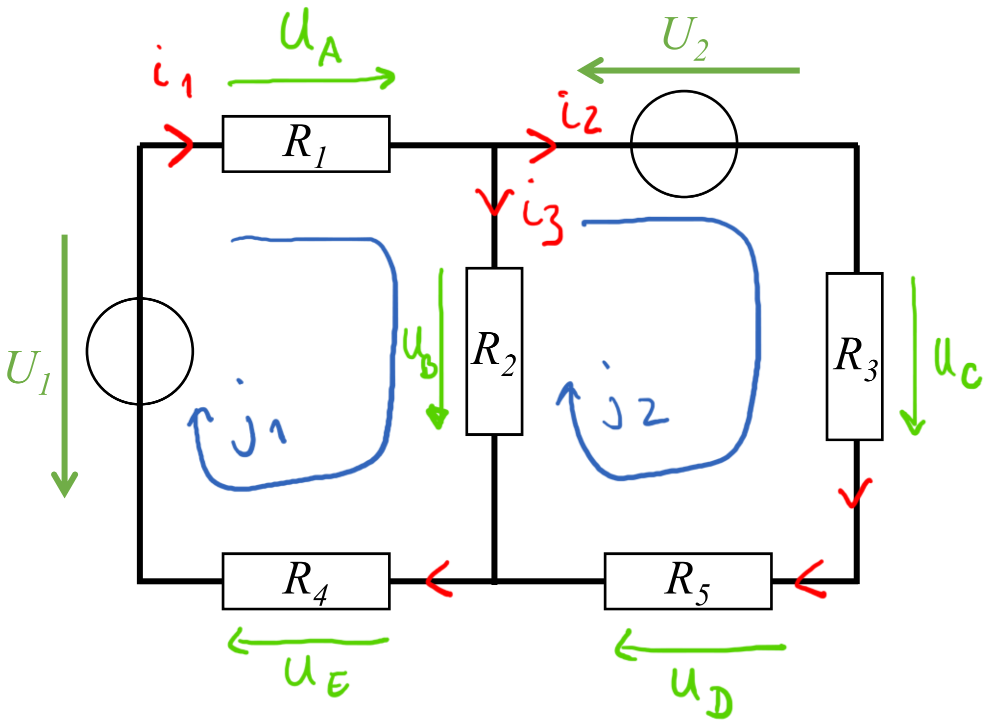
Etape 3: Appliquer la loi de Kirchhoff pour les mailles

Etape 4: Utiliser la loi d'Ohm pour exprimer les tensions <u>en fonction des courants de maille</u>

Etape 5: Résoudre les équations algébriques simultanées pour les courants de maille

Etape 6: Déterminer les caractéristiques recherchées en utilisant les courants de maille

Mise en équation: exemple



$i_1 = j_1$

$i_2 = j_2$

$i_3 = j_1 - j_2$

maille 1 : $U_A + U_B + U_E = U_1$

$$R_1 i_1 + R_2 i_3 + R_4 i_1 = U_1$$

$$(R_1 + R_4) j_1 + R_2 (j_1 - j_2) = U_1$$

$$\boxed{(R_1 + R_4 + R_2) j_1 - R_2 j_2 = U_1}$$

maille 2 $U_C + U_D - U_B = U_2$

$$R_3 i_2 + R_5 i_2 - R_2 i_3 = U_2$$

$$(R_3 + R_5) j_2 - R_2 (j_1 - j_2) = U_2$$

$$\boxed{-R_2 j_1 + (R_2 + R_3 + R_5) j_2 = U_2}$$

Représentation matricielle

Il est possible d'écrire les équations d'un circuit sous la forme de matrice.

Reprenons l'exemple précédent:

$$(R_1 + R_2 + R_{\cancel{3}4})j_1 - R_2 j_2 = U_1$$

$$-R_2 j_1 + (R_3 + R_5 + R_2)j_2 = U_2$$

$$\begin{bmatrix} (R_1 + R_2 + R_{\cancel{3}4}) & -R_2 \\ -R_2 & (R_3 + R_5 + R_2) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} j_1 \\ j_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} U_1 \\ U_2 \end{bmatrix}$$

Resistances

courants de mailles

tension

Etablir la matrice par inspection (1)

En général si le circuit a N mailles indépendantes les équations des courants des mailles peuvent être représentées de la sorte:

$$\underbrace{\begin{bmatrix} R_{11} & R_{12} & \dots & R_{1N} \\ R_{21} & R_{22} & \dots & R_{2N} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ R_{N1} & R_{N2} & \dots & R_{NN} \end{bmatrix}}_{\textit{Matrice des résistances}} \underbrace{\begin{bmatrix} j_1 \\ j_1 \\ \vdots \\ j_N \end{bmatrix}}_{\substack{\textit{Vecteur des} \\ \textit{courants} \\ \textit{(inconnues)}}} = \underbrace{\begin{bmatrix} U_{m1} \\ U_{m2} \\ \vdots \\ U_{mN} \end{bmatrix}}_{\substack{\textit{Vecteur} \\ \textit{des} \\ \textit{tensions}}}$$

Etablir la matrice par inspection (2)

Vecteur des courants des mailles indépendantes j_k

- Comme défini sur votre diagramme des mailles
- ATTENTION: choisir le sens de parcours des mailles dans la même direction !

Matrice des résistances

- Les éléments $\boldsymbol{R_{kk}}$ sur la diagonale principale: somme des résistances dans la maille m_k parcourues par le courant correspondant.
- Les éléments $\boldsymbol{R_{kl}}$ hors diagonale: résistances de couplage entre les deux mailles m_k et m_{l}. La résistance de couplage est la somme des résistances partagées par les deux mailles.
- Le signe des résistances de couplage est *négatif* (-) quand les courants de maille qui parcourent cette résistance sont dans le sens contraire. Le signe est *positif* (+) si les courants sont dans le même sens

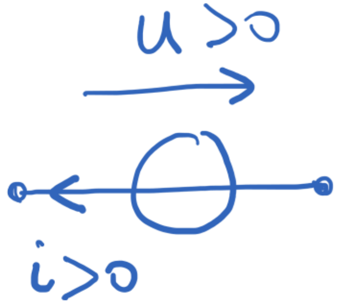
Vecteur des tensions U_{mk} :

- Somme des sources de tension dans la maille m_k

Rappel sur les sources de tensions

En suivant notre convention des sens/moteur:

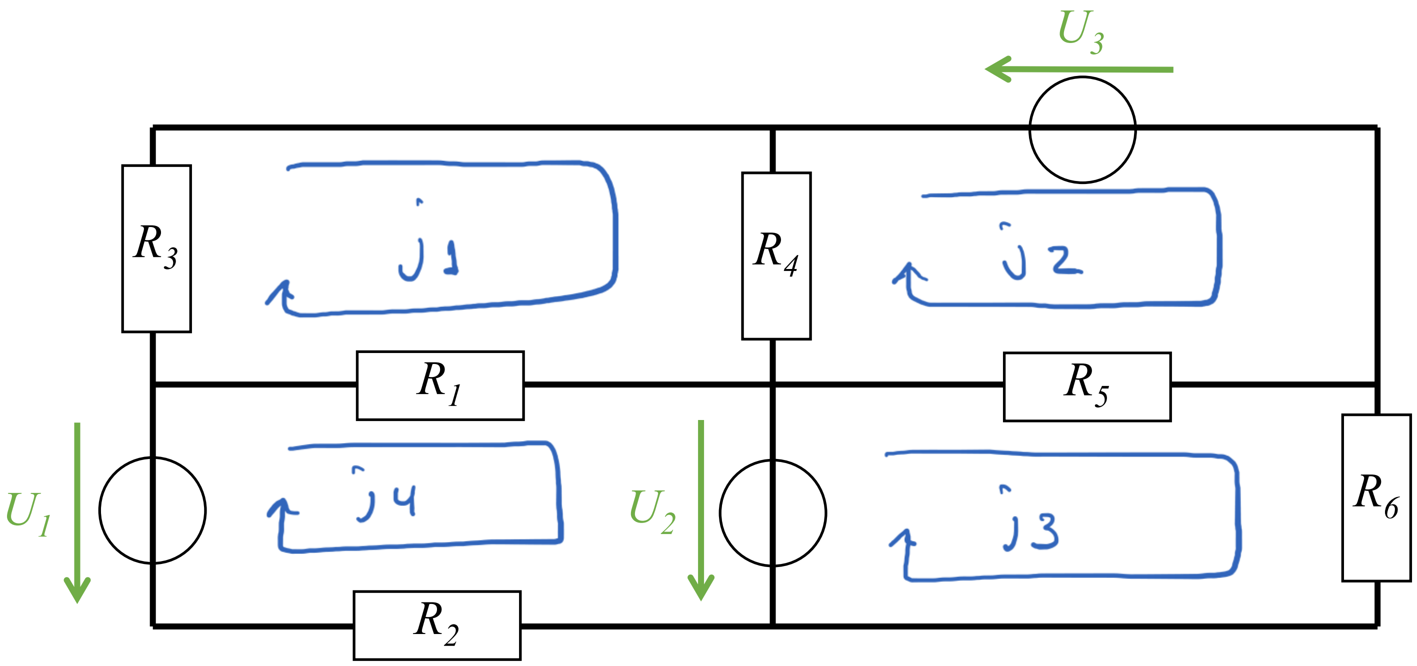
- Si la tension <u>délivrée</u> est indiquée par une flèche, celle ci est a priori orientée du potentiel le plus élevé au potentiel le plus bas
- Si la source délivre de la puissance, le courant positif s'écoule du pôle positif au pôle négatif (à l'extérieur de la source)



$P < 0 \rightarrow$ délivre

En conclusion: une source de tension assiste le courant de maille si la flèche de tension et le sens du courant de maille est opposé

Exemple 1



$$\begin{bmatrix} (R_1+R_3+R_4) & -R_4 & 0 & -R_1 \\ -R_4 & (R_4+R_5) & -R_5 & 0 \\ 0 & -R_5 & (R_5+R_6) & 0 \\ -R_1 & 0 & 0 & R_1+R_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} j_1 \\ j_2 \\ j_3 \\ j_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ U_3 \\ U_2 \\ U_1 - U_2 \end{bmatrix}$$

Résolution d'une matrice – inversion

Nous cherchons a résoudre pour les courants j_k:

$$\begin{bmatrix} & & \\ & R_{kl} & \\ & & \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \\ j_k \\ \\ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \\ v_{mk} \\ \\ \end{bmatrix}$$

La méthode d'inversion donne:

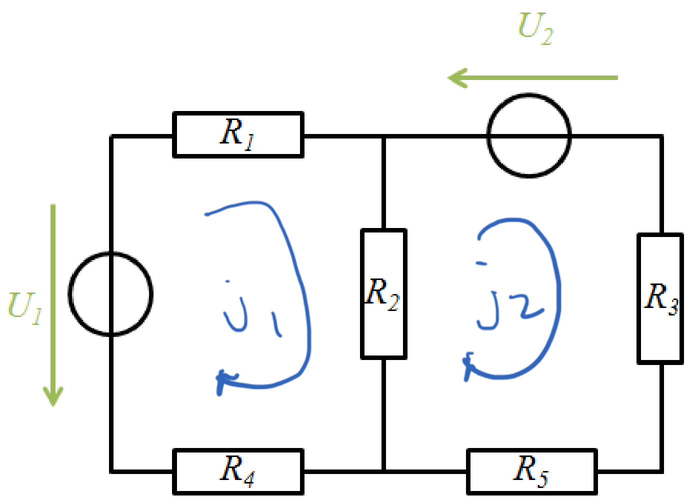
$$\begin{bmatrix} \\ j_k \\ \\ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} & & \\ & R_{jl} & \\ & & \end{bmatrix}^{-1}\begin{bmatrix} \\ v_{mk} \\ \\ \end{bmatrix}$$

Inversion d'une matrice 2 x 2:

$$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}^{-1} = \frac{1}{\boxed{ad-bc}}\begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}$$

déterminant

Exemple



$$\begin{bmatrix} (R_1 + R_2 + R_{\cancel{3}4}) & -R_2 \\ -R_2 & (R_3 + R_5 + R_2) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} j_1 \\ j_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} U_1 \\ U_2 \end{bmatrix}$$

$U_1 = 12$ V, $U_2 = 6$ V
$R_1 = 1\ \Omega$, $R_2 = 2\ \Omega$, $R_3 = 1\ \Omega$, $R_4 = 3\ \Omega$, $R_5 = 1\ \Omega$,

$$\begin{bmatrix} j_1 \\ j_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 3 \end{bmatrix} A$$

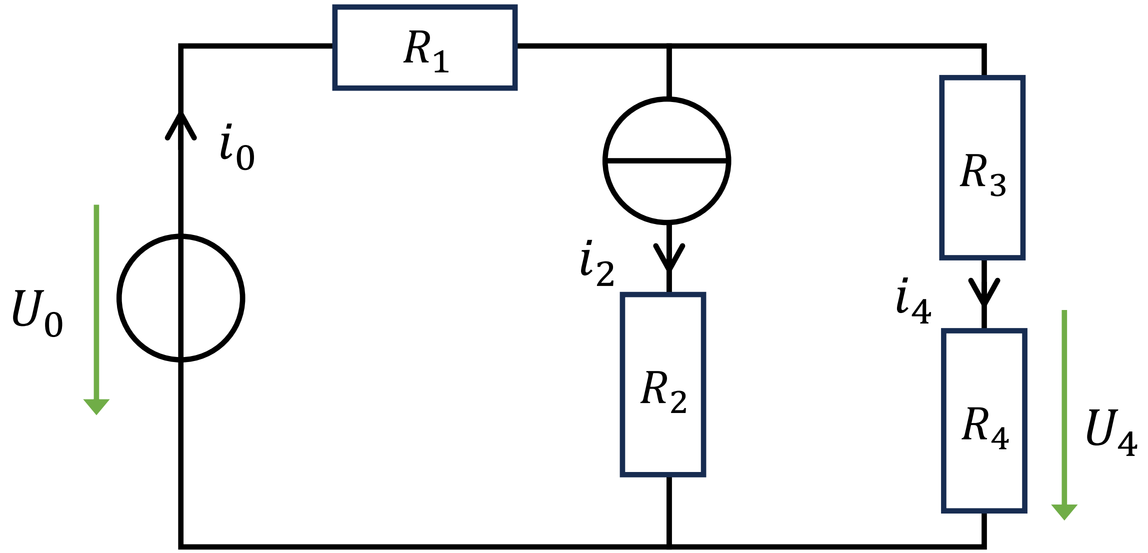
Autres circuits

Calculer la puissance fournie par la source de tension et la puissance consommée par R_4 en fonction de U_0 et de i_2

Pas évident à simplifier …

Il est toujours possible d'appliquer les lois de Kirchhoff et la loi d'Ohm

Comment faire autrement ?



Principe de superposition

Principe de superposition

Une des propriétés les plus fondamentales des systèmes composés d'éléments linéaires, électriques ou non:

La réponse du système à une somme d'excitations est égale à la somme des réponses dues à chaque excitation prise séparément

Pour l'analyse de circuit contenant plusieurs sources:

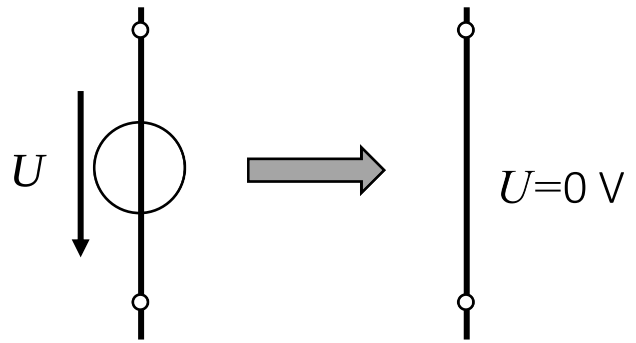
- On ne traite qu'une source à la fois, en éteignant les autres sources
- On répète cela pour chaque source
- On additionne les résultats

Note: le principe de superposition trouve son origine dans la linéarité des équations de Maxwell qui forment la base de l'électromagnétisme

Concept: éteindre une source

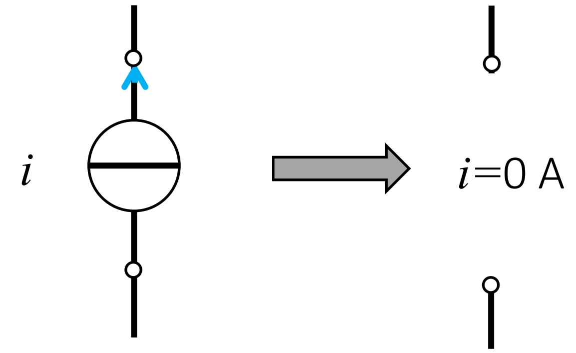
Eteindre une source de tension idéale:

- Résistance de la source nulle (pas de chute de tension)
- Elle est remplacée par un court circuit



Eteindre une source de courant idéale

- Résistance de la source infinie (pas de passage de courant)
- Elle est remplacée par un circuit ouvert



Principe de superposition

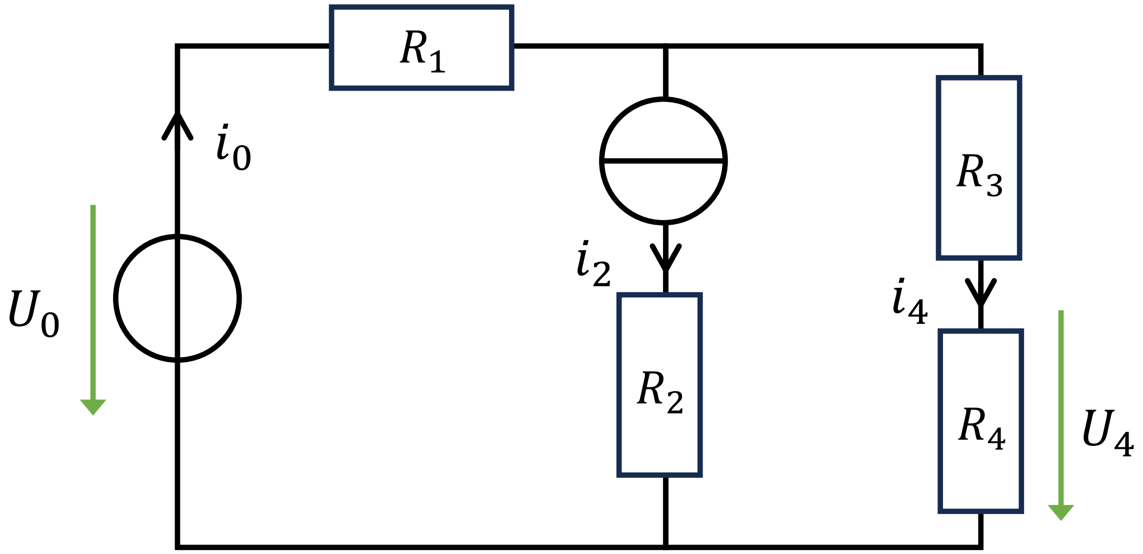
Soit un circuit linéaire soumis à l'action de plusieurs sources indépendantes :

(1) le courant résultant en un point quelconque du circuit s'obtient en effectuant la somme algébrique des courants dus à chaque source prise individuellement et agissant seule

(2) la tension aux bornes de n'importe quel élément s'obtient en effectuant la somme algébrique des tensions dues à chaque source prise individuellement et agissant seule

Exemple

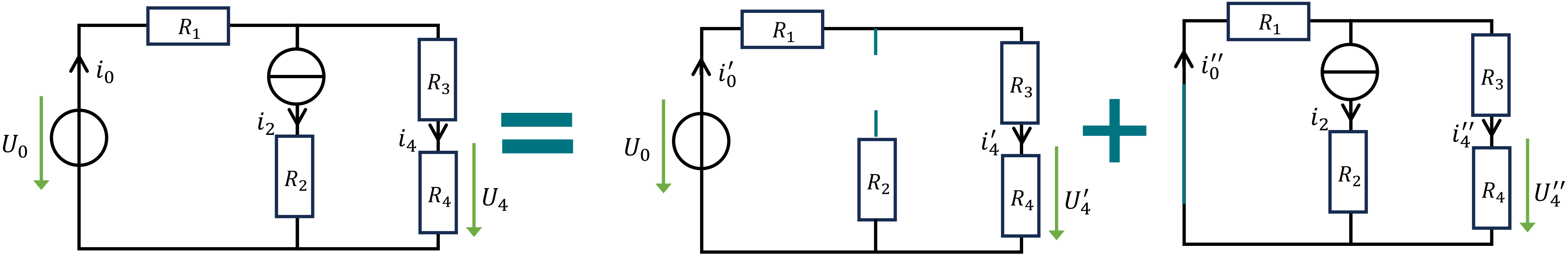
Calculer la puissance fournie par la source de tension et la puissance consommée par R_4 en fonction de U_0 et de i_2



Points clés

Le principe de superposition permet de séparer un problème à N sources en N problèmes à une source

- Une source de tension éteinte est un court-circuit
- Une source de courant éteinte est un circuit ouvert



En résumé

Méthode de résolution par réductions

- Bien observer le schéma et le réduire en combinant éléments en série et en parallèle
- Faire l'analyse pour obtenir les grandeurs fondamentales puis les grandeurs associées aux éléments simplifiés

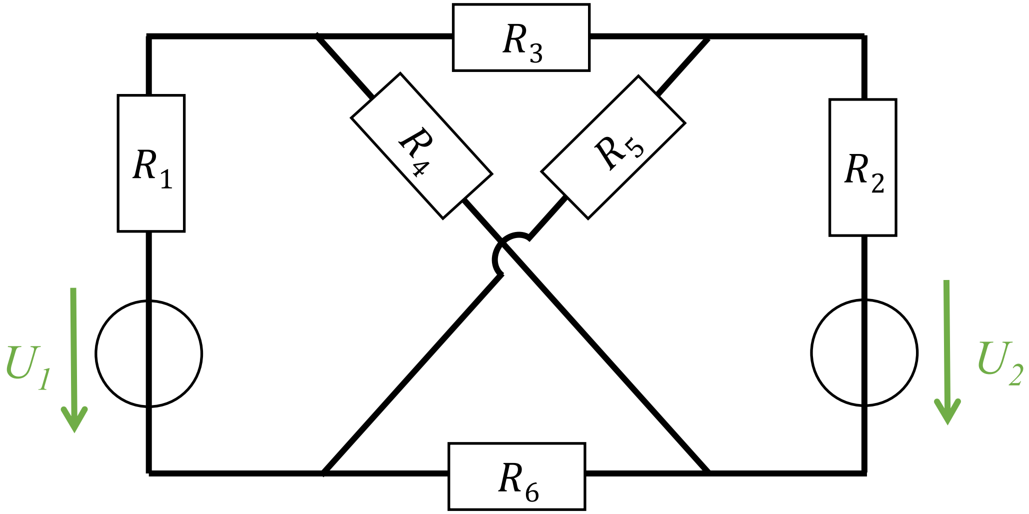
Mise en équation basée sur l'analyse des mailles

- Méthode plus générale pour les circuits planaires et avec seulement des sources de tensions indépendantes
- On obtient N équations indépendantes pour N mailles indépendantes
- La résolution des équations nous donne les courants de maille à partir desquels nous pouvons calculer toutes autres valeurs.
- Les équations peuvent être écrites sous forme matricielle par inspection

Principe de superposition

- La réponse du système à une somme d'excitations est égale à la somme des réponses dues à chaque excitation prise séparément

Exemple – mise en équation



Exemple

Calculer i en utilisant le principe de superposition